Erarbeiten Sie sich den Inhalt dieses Arbeitsblattes selber

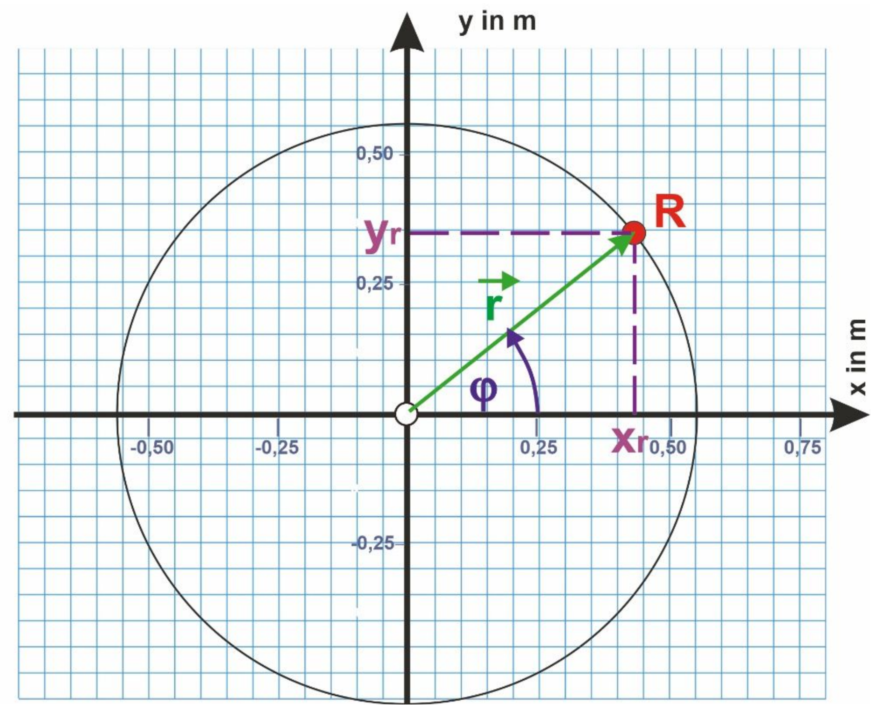
Beachten Sie hierzu auch die GeoGebra-Datei **`Vektoren der Kreisbewegung.ggb`**

Vektoren der Kreisbewegung

Bewegt sich ein Körper entlang einer Kreisbahn des Radius r, spricht man von Kreisbewegung. Legt dieser Körper dabei einen Winkel φ zurück, der proportional mit der Zeit t zunimmt, spricht man von einer **Kreisbewegung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit** ω. Es gilt:

$$\varphi = \omega t$$

Da die Kreisbewegung eine Bewegung in der Ebene ist, betrachtet man diese in einem **x-y-Koordinaten-system**:



Zur Beschreibung der Kreisbewegung (mit konstanter Winkelgeschwindigkeit) eines **Ortspunktes R** wird der **Ortsvektor** $\vec{r} = \overrightarrow{0R}$ in Abhängigkeit von der Zeit t betrachtet. Wenn **r** der Kreisradius und **ω** die Winkelgeschwindigkeit sind, gilt:

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \quad \\ \quad \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1

Vervollständigen Sie Gleichung (1). Beziehen Sie sich dabei auf die Abbildung oben.

Vergleichen Sie Ihr Ergebnis anschließend mit der Lösung auf der folgenden Seite.

Lösung zu Aufgabe 1:

$$\vec{r}(t) = r\begin{pmatrix} Cos(\omega\, t) \\ Sin(\omega\, t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

[Verwenden Sie bei der weiteren Bearbeitung dieses Lernprogrammes die links wiedergegeben Gleichung (1) für $\vec{r}(t)$]

Das die Ortsgleichung für die Kreisbewegung des Körpers in vektorieller Form vorliegt, spricht man hier von einer **vektoriellen Ortsgleichung**.

Aufgabe 2

Betrachtet wird nun ein Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0{,}50\ s$, der sich auf einer Kreisbahn des Radius $r = 1{,}0\ m$ bewegt. Die Winkelgeschwindigkeit beträgt konstant $\omega = 0{,}75\ ^1/_s$.

Geben Sie für diese Kreisbewegung die Ortskoordinate $\vec{r}(t = 0{,}50\ s)$ mit eingesetzen Werten an:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = r\begin{pmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 2:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = 1{,}0m\begin{pmatrix} Cos(0{,}75\,\frac{1}{s}\cdot 0{,}50\ s) \\ Sin(0{,}75\,\frac{1}{s}\cdot 0{,}50\ s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}931\ m \\ 0{,}367\ m \end{pmatrix} \quad (2)$$

(Achtung: Taschenrechner auf RAD stellen !)

Durch Ableitung der vektoriellen Ortsgleichung von $\vec{r}(t)$ nach der Zeit t erhält man die (vektorielle) Geschwindigkeitsgleichung und die vektorielle Beschleunigungsgleichung. Es gilt allgemein:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = r\begin{pmatrix} \dot{Cos}(\omega\, t) \\ \dot{Sin}(\omega\, t) \end{pmatrix} = r\omega\begin{pmatrix} -Sin(\omega\, t) \\ Cos(\omega\, t) \end{pmatrix} \quad (2)$$

und

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}(t) = r\,\omega^2\begin{pmatrix} -Cos(\omega\, t) \\ -Sin(\omega\, t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

[Im Mathematik-Unterricht und im Mathematik-Additum werden Sie lernen, wie man durch Ableitung auf die Gleichungen (2) und (3) kommt]

Aufgabe 3

Berechnen Sie mit Hilfe der Gleichungen (2) und (3) die (vektoriellen !) Geschwindigkeiten $\vec{v}(t)$ und $\vec{a}(t)$ zum Zeitpunkt $t_0 = 0{,}50\ s$.

Lösung zu Aufgabe 3:

$$\vec{v}(t_0) = \begin{pmatrix} -0{,}275\,\frac{m}{s} \\ 0{,}698\,\frac{m}{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}275 \\ 0{,}698 \end{pmatrix}\frac{m}{s} \qquad (4)$$

und

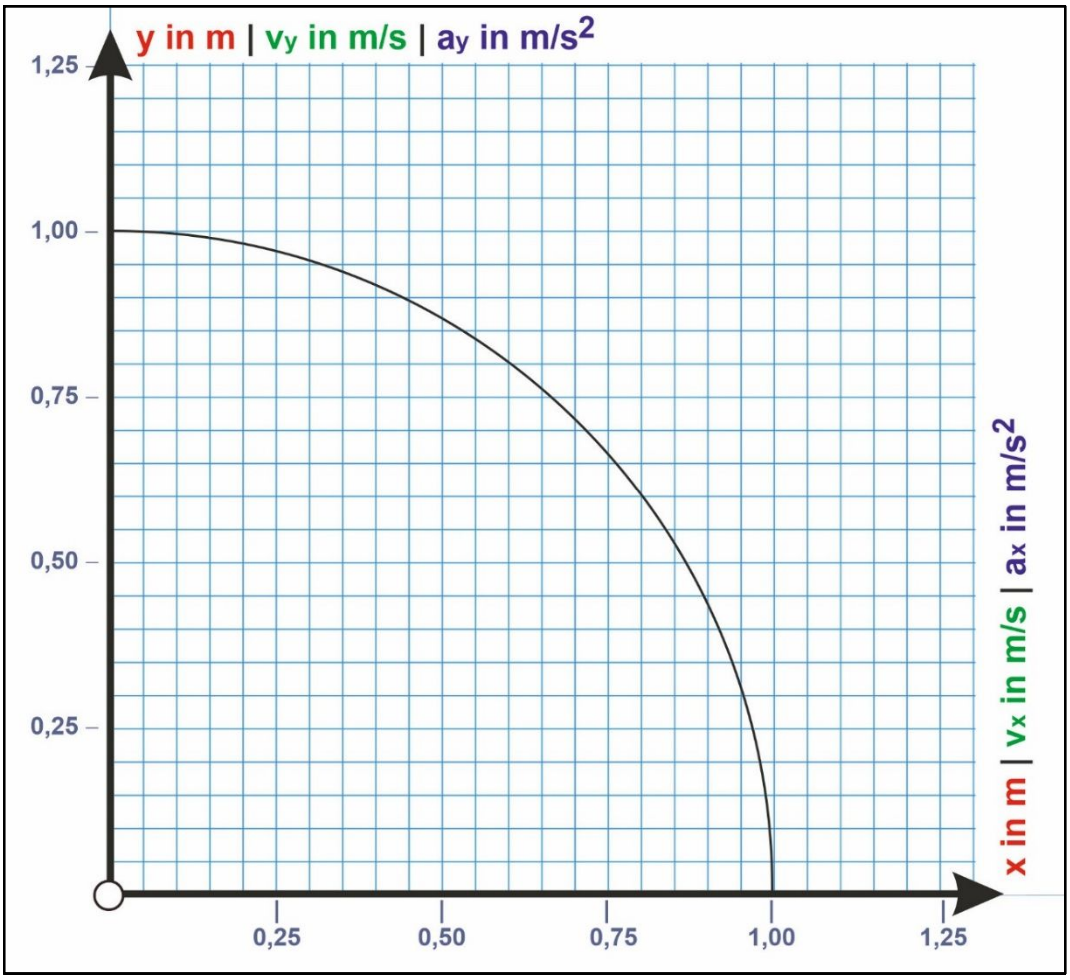
$$\vec{a}(t_0) = \begin{pmatrix} -0{,}523\,\frac{m}{s^2} \\ -0{,}206\,\frac{m}{s^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}523 \\ -0{,}206 \end{pmatrix}\frac{m}{s^2} \qquad (5)$$

Bei der zeichnerischen Auftragung eines Vektors $\vec{b} = \binom{b_x}{b_y}$ wird der Fuß des Vektors auf einen Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{a} = \binom{a_x}{a_y}$ gelegt und von dort aus der Vektor gezeichnet. Die Spitze des Vektors liegt dann auf dem Ortspunkt mit dem Ortsvektor $\vec{a} + \vec{b} = \binom{a_x}{a_y} + \binom{b_x}{b_y} = \binom{a_x + b_x}{a_y + b_y}$:

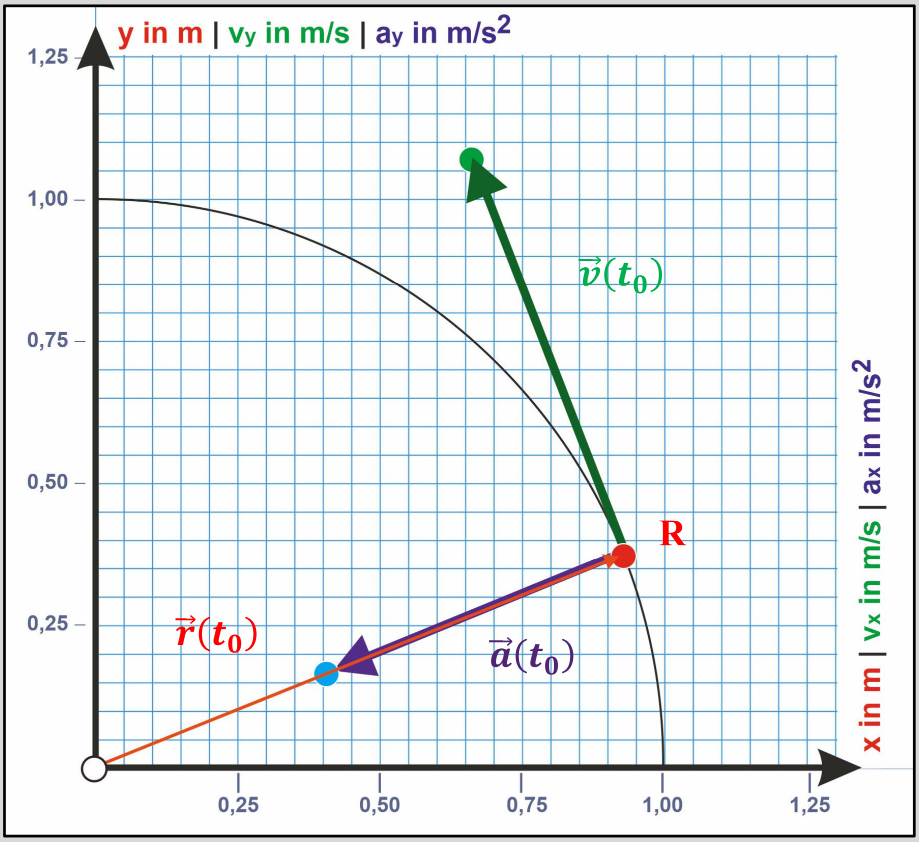
Aufgabe 4

Tragen Sie in das folgende Koordinatensystem ein:

- Ortspunkt R (zum Zeitpunkt t_0)
- Ortsvektor $\vec{r}(t_0)$ (vom **Koordinatenursprung** ausgehend)
- Ortsvektor $\vec{v}(t_0)$ (vom **Ortspunkt R** ausgehend)
- Ortsvektor $\vec{a}(t_0)$ (vom **Ortspunkt R** ausgehend)



Lösung zu Aufgabe 4:



Achten Sie bei der Lösung von Aufgabe 4 darauf, dass beide Achsen **gemischte Einheiten** besitzen. Zeichnen und/oder beschriften Sie die Vektoren so, dass deutlich erkennbar ist, welcher Pfeil zu welchem Vektor gehört.

Aufgabe 5

Beschreiben Sie, welcher Zusammenhang zwischen den Richtungen des Ortsvektors $\vec{r}(t_0)$, des Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}(t_0)$ und des Beschleunigungsvektors $\vec{a}(t_0)$ besteht.

Geben Sie ferner an, wie die Richtungen dieser drei Vektoren bezüglich der Kreisbahn verlaufen:

Lösung zu Aufgabe 5:

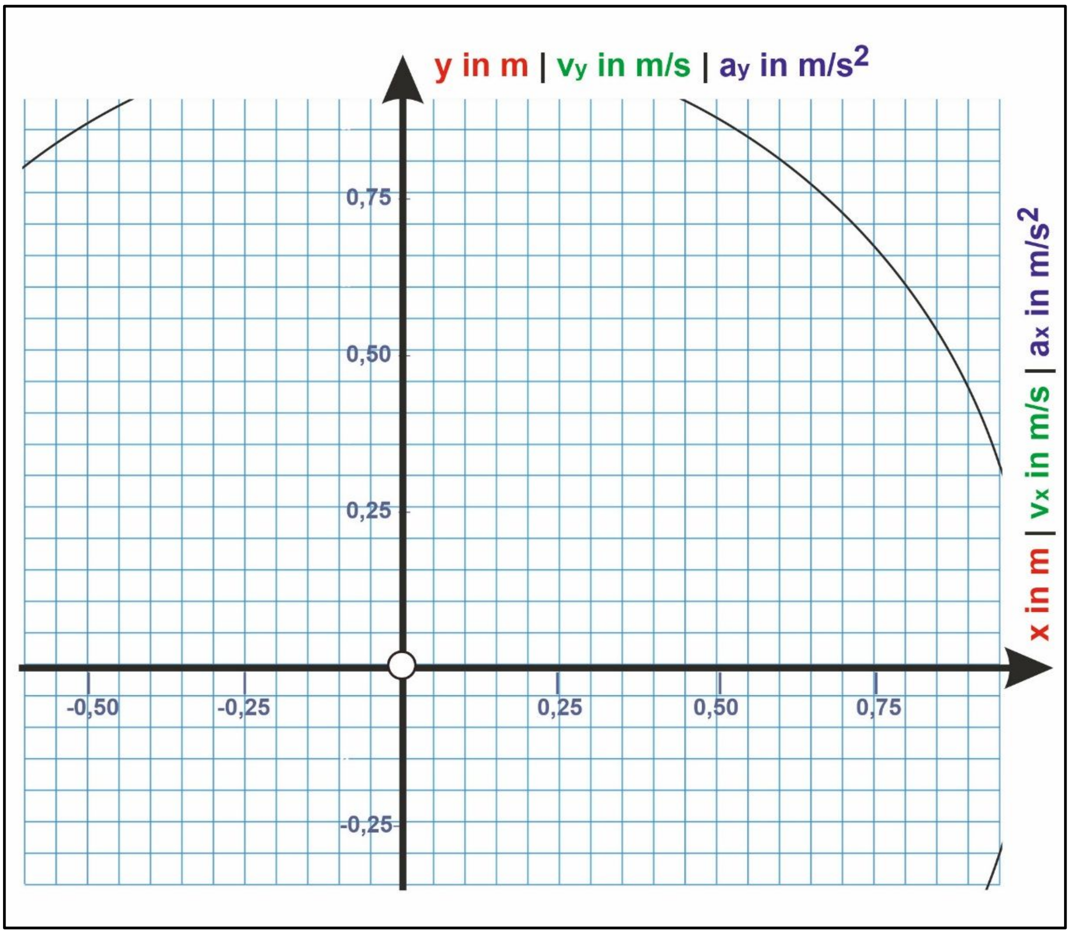
$\vec{v}(t_0) \perp \vec{r}(t_0)$		$\vec{r}(t_0)$ radial zur Kreisbahn
$\vec{a}(t_0) \perp \vec{v}(t_0)$		$\vec{v}(t_0)$ tangential zur Kreisbahn
$\vec{a}(t_0) \upharpoonleft\!\downharpoonright \vec{r}(t_0)$	(antiparallel)	$\vec{a}(t_0)$ radial zur Kreisbahn

Aufgabe 6

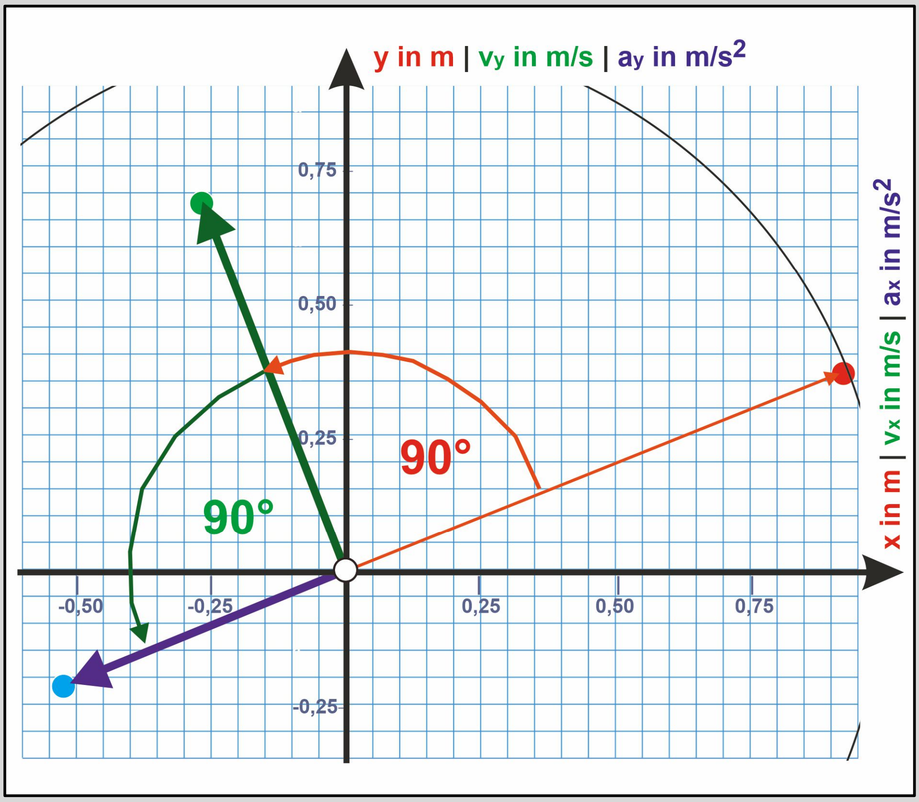
Tragen Sie in das folgende Koordinatensystem ein:

- Ortspunkt R (zum Zeitpunkt t_0)
- Ortsvektor $\vec{r}(t_0)$ (vom **Koordinatenursprung** ausgehend)
- Ortsvektor $\vec{v}(t_0)$ (vom **Koordinatenursprung** ausgehend)
- Ortsvektor $\vec{a}(t_0)$ (vom **Koordinatenursprung** ausgehend)

Ermitteln Sie, wie groß der Winkel α_{rv} (in Grad) zwischen dem Ortsvektor $\vec{r}(t_0)$ und dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t_0)$ **und** der Winkel α_{va} (in Grad) zwischen dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t_0)$ und dem Beschleunigungsvektor $\vec{a}(t_0)$ ist.



Lösung zu Aufgabe 6:



Achten Sie darauf, dass bei Vektoren unbedingt die **Richtung eines Winkels** zu berücksichtigen ist:

$\alpha>0$	Positiver Drehsinn	(gegen den Uhrzeigersinn)
$\alpha<0$	Negativer Drehsinn	(im Uhrzeigersinn)

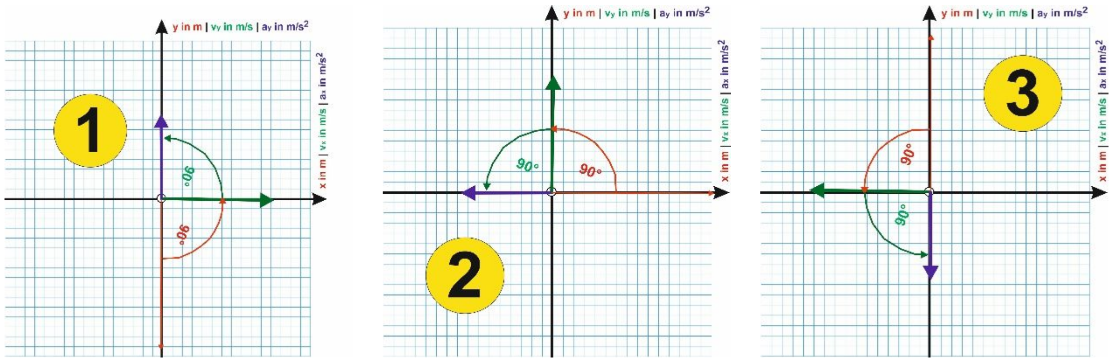
Aufgabe 7

Beschreiben Sie, wie die beiden Winkel (α_{rv} und α_{va}) physikalisch zu interpretieren sind. Gehen Sie dabei auch auf die **Projektion** der Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ auf die **y-Koordinate** [y-Komponenten: $\vec{r}(t_0)\rightarrow r_y$; $\vec{v}(t_0)\rightarrow v_y$; $\vec{a}(t_0)\rightarrow a_y$] ein:

Lösung zu Aufgabe 7:

Wird der **Richtungsvektor** $\vec{e_r} = \frac{\vec{r}}{r}$ **des Ortsvektors** um 90° in Richtung der Drehbewegung (hier: positiv, da ω > 0) rotiert, fällt er mit dem Richtungsvektor $\vec{e_v} = \frac{\vec{v}}{v}$ des Geschwindigkeitsvektors zusammen.

Wird der **Richtungsvektor** $\vec{e_v} = \frac{\vec{v}}{r}$ **des Geschwindigkeitsvektors** um 90° in Richtung der Drehbewegung (hier: positiv, da ω>0) rotiert, fällt er mit dem **Richtungsvektor** $\vec{e_a} = \frac{\vec{a}}{v}$ **des Beschleunigungsvektors** zusammen:

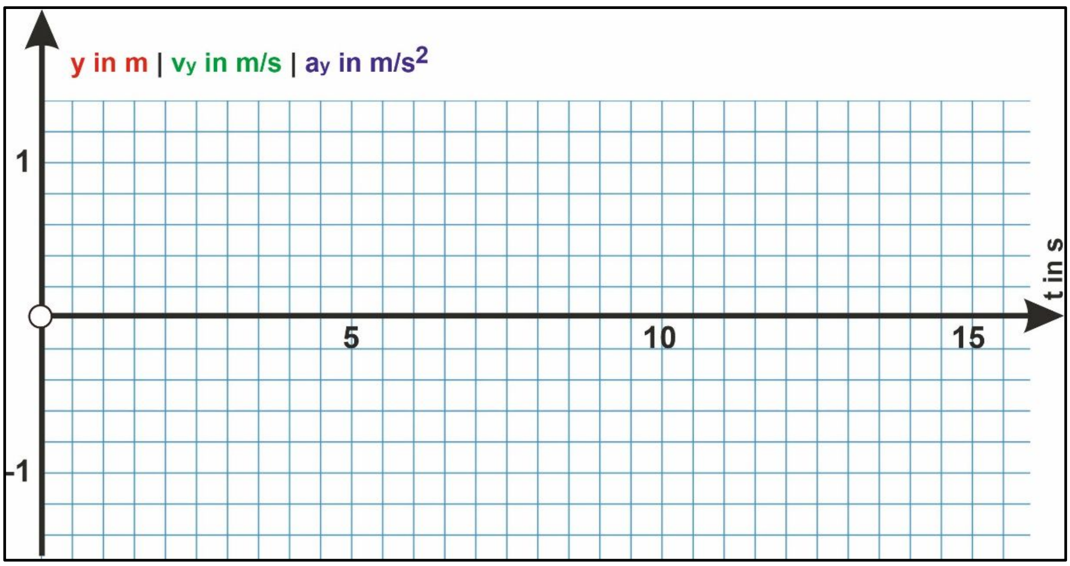


Die Vektoren $\vec{r}$, $\vec{v}$ und $\vec{a}$ rotieren im positiven Drehsinn synchron um den Mittelpunkt des Kreises (Koordinatenursprung):

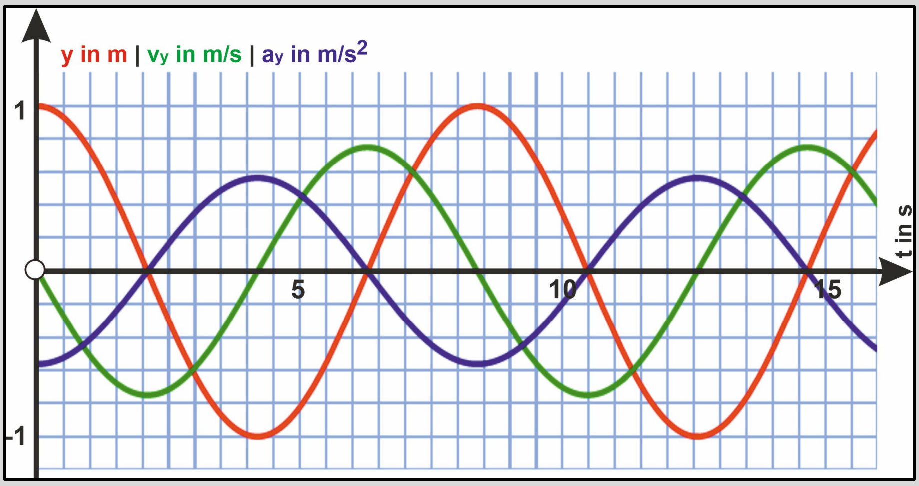
Zuerst erreicht die **y-Komponente** des **Beschleunigsvektors** $\vec{a}$ seinen maximalen Wert.	Eine Viertel Umdrehung später erreicht die **y-Komponente** des **Geschwindigkeitsvektors** $\vec{v}$ seinen maximalen Wert.	Nach einer weiteren Viertel Umdrehung erreicht schließlich **die y-Komponente** des **Ortsvektors** $\vec{a}$ seinen maximalen Wert.

Aufgabe 8

Zeichnen Sie die Graphen der y-Komponenten der Ortsfunktion $\vec{a}(t)$, der Geschwindigkeitsfunktion $\vec{v}(t)$ und der Beschleunigungsfunktion $\vec{a}(t)$ in die folgende Diagrammvorlage ein:

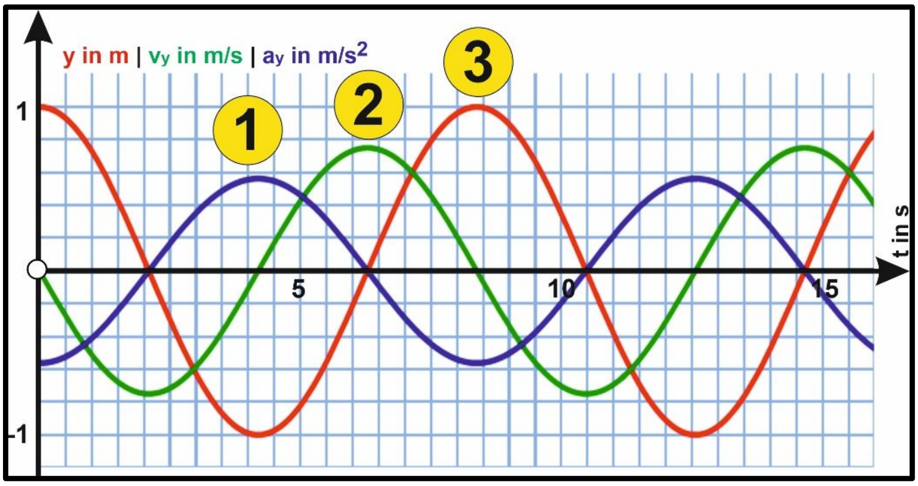


Lösung zu Aufgabe 8:



Diskussion der Kurven (siehe folgende Abbildung):

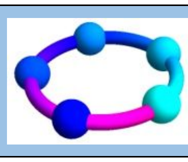
Die drei benachbarten Maxima von $\vec{a}(t)$ (1), $\vec{v}(t)$ (2) und $\vec{s}(t)$ (3) [Ziffern wie in Lösung zu Aufgabe 7] sind jeweils um ein Viertel einer Periode zu den benachbarten Maxima verschoben d.h., die Phasenverschiebung zwischen $\vec{a}(t)$ und $\vec{v}(t)$ beträgt $\pi/2$ und die Phasenverschiebung zwischen $\vec{v}(t)$ und $\vec{s}(t)$ beträgt ebenfalls $\pi/2$:



Aufgabe 9

Geben Sie an, wie sich im Diagramm von Aufgabe 8 die Kurven von $\vec{a}(t)$ und $\vec{s}(t)$ zueinander verhalten.

Beachten Sie hierzu auch die GeoGebra-Datei
`Vektoren der Kreisbewegung.ggb`



Lösung zu Aufgabe 9:

Kurven von $\vec{a}(t)$ und $\vec{s}(t)$ verhalten sich zueinander gegenläufig.